微分方程式の安定性

新垣貴史

2006 年 6 月 16 日

1 内容

微分方程式を「解く」のではなく、その解の振る舞い[*1]をとらえることをこのテキストの目標とします。

まず、線型微分方程式について線型代数の知識を使い、その解について調べます。固有空間への射影を使って、解の振る舞いについてのイメージをつかみます。線型微分方程式の安定性について固有値による議論をした後、リヤプノフの考え方を導入します。

そして、非線型の場合にもそれが応用できることを示します。また、線型近似による平衡点周りの安定性についての議論も考えます。

必要な知識は、常微分方程式の基礎（単振動の微分方程式くらいは解ける。）線型代数の基礎（対角化、固有値くらいは分かる。）です。

[*1] 解が時間経過によりどのように動くか（発散するか？収束するか？一定範囲内に留まるか？など）ということ。

2　線型微分方程式

2.1　微分方程式の行列を使った表現

　まず、微分方程式をベクトル形式で表します。
　下の定数係数連立 n 次斉次[*2]線型微分方程式を考えましょう。

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \tag{2.1a}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \tag{2.1b}$$

$$\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \tag{2.1c}$$

ここで、

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

と置くと、上の微分方程式は下のように書き換えられます。

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = M\boldsymbol{x} \tag{2.4}$$

　この微分方程式は（形式的に）必ず解けて、初期条件 $\boldsymbol{x}|_{t=t_0} = \boldsymbol{x_0}$ の元でのその解は

$$\boldsymbol{x} = e^{M(t-t_0)}\boldsymbol{x_0} \tag{2.5}$$

です。

　ここで、行列の指数関数 e^{Mt} は

$$e^{Mt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} M^k \tag{2.6}$$

で定義されています。
　以後、この節ではこの方程式について考えていきます。

2.2　固有空間への射影

　まず、行列 M が対角化可能な場合を扱います。M が対角化可能なら、ある n 次正方行列 T があって、

$$T^{-1}MT = \Lambda \tag{2.7}$$

[*2] 式 2.4 のように、式に定数項が含まれない式のこと。

が対角行列とできます。このとき、

$$T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \tag{2.8}$$

となる新しいベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ により、微分方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \Lambda\boldsymbol{y} \tag{2.9}$$

となります。この時 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ とする。λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は重複を許した行列 M の固有値である。変換後の変数 y についての解は、

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{\Lambda(t-t_0)}\boldsymbol{y}_0 = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1(t-t_0)}, e^{\lambda_2(t-t_0)}, \cdots e^{\lambda_n(t-t_0)})\boldsymbol{y}_0 \tag{2.10}$$

となります[*3]。つまり、方程式の解は次の様に表せます。

$$\boldsymbol{x} = Te^{\Lambda(t-t_0)}T^{-1}\boldsymbol{x}_0 \tag{2.11}$$

方程式の（形式的）解が $e^{M(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$ であることを考えると、次の等式が成り立ちます。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}M^k = e^{Mt} = e^{T\Lambda T^{-1}t} = Te^{\Lambda(t-t_0)}T^{-1} \tag{2.12}$$

ここまでの話はどの本にも載っていて、どんな講義でもやるようです。

これで微分方程式の「答え」にはなっています。しかし、解がどのような振る舞いをするかは実際にグラフを書いてみるなどしないと分からないでしょう。つまり解の振る舞いを調べるにはこの結果をもっと解析[*4]しなければいけません。

ところで、e^{Mt} は $Te^{\Lambda(t-t_0)}T^{-1}$ であるから、その成分は $e^{\lambda_i(t-t_0)}$ の線型結合で出来ているはずです。実は、これは次に示す定理によって保証されています。

定理 2.1 e^{Mt} は、M が対角化可能な行列ならば、重複をゆるさない固有値 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, p)$ と、それに対応する固有空間への射影を表す行列 P_i により必ず、

$$e^{Mt} = P_1e^{\lambda_1 t} + P_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + P_pe^{\lambda_p t} \tag{2.13}$$

と分解することが出来る。

この定理を証明する前に、行列の固有値と対角化可能性について考えてみましょう。行列 M の固有ベクトルとは、 M **をそのベクトルにかけて得られるベクトルが、元のベクトルと平行なベクトル**のことです。そしてその場合のベクトルの伸縮率を固有値といいます。

図 1 を見れば分かるように、ベクトル $\boldsymbol{x}$ に行列 M を作用させるのはベクトル x を固有ベクトル方向に分解（射影分解）し、固有値をかけることと同じです。

e^{Mt} は M のべき級数で定義されてるから、有限回か無限回かの違いに目をつぶれば M の自然数乗のようなものだと考えることが出来ます。つまりこの定理の意味するところは、e^{Mt} はそれぞれの固有ベクトル P_ix 方向へ $e^{\lambda_i t}$ 倍する、という変形を合成したものにすぎないと言うことです。

[*3] diag(. . .) とは、. . . を対角成分に持つ対角行列です。

[*4] よく取られる方法は相図（様々な初期値を取った時の $\boldsymbol{R}^n$ における $\boldsymbol{x(t)}$ の解曲線。）を書いてその流れを見る、というものです。

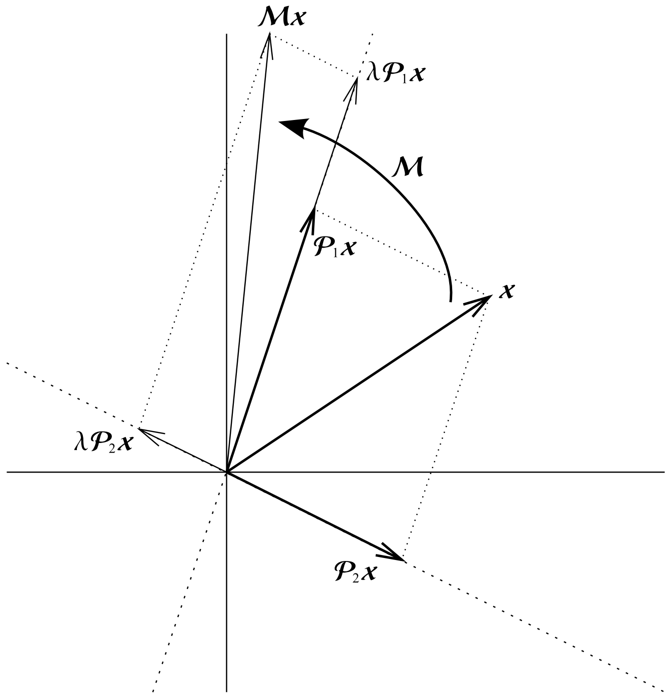

図 1　行列の固有値と射影分解

また、行列 M が対角化可能であるとは、どんな $\boldsymbol{x}$ もこのように射影分解が出来、その方法は一通りということです。式で表せば次の様になります。固有値 λ_i に対応する固有空間[*5]を F_i、その固有空間への射影を P_i[*6]としましょう。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_p \qquad P_i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i \in F_i \ (i = 1, 2, \cdots, p) \tag{2.14}$$

ここで $\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x}$ であるから、行列だけの式にする[*7] と

$$I = P_1 + P_2 + \cdots + P_p \tag{2.15}$$

が成立します。上のように分解すると、

$$\begin{aligned} M\boldsymbol{x} &= M\boldsymbol{x}_1 + M\boldsymbol{x}_2 + \cdots + M\boldsymbol{x}_p \\ &= \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_p\boldsymbol{x}_p \\ &= \lambda_1 P_1\boldsymbol{x} + \lambda_2 P_2\boldsymbol{x} + \cdots + \lambda_p P_p\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{2.16}$$

となります。これも行列だけの式にすることが出来ます。

$$M = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_p P_p \tag{2.17}$$

ここで、射影の性質[*8]、

$$P_i^2 = P_i \qquad P_i P_j = O \tag{2.18}$$

[*5] 固有値 λ_i の固有ベクトル全体とゼロベクトルを合わせたもの。
[*6] ここでは、$\boldsymbol{x}$ に P_i を作用させるとベクトルが固有空間 F_i へ移動すると捕らえて下さい。
[*7] 任意の $\boldsymbol{x}$ について成立しているから可能。
[*8] この性質の証明は A.1 節にあります。

と式 2.15、2.17 を使えば、下の式が成り立つことがすぐに分かります。

$$M^2 = \lambda_1^2 P_1 + \lambda_2^2 P_2 + \cdots + \lambda_p^2 P_p \tag{2.19a}$$

$$MP_i = \lambda_i P_i \tag{2.19b}$$

$$aM + bI = (a\lambda_1 + b)P_1 + (a\lambda_2 + b)P_2 + \cdots + (a\lambda_p + b)P_p \qquad (a, b \in R) \tag{2.19c}$$

また、上の結果を利用すると次式が導かれます。

$$(M - \lambda_i)P_i = \lambda_i P_i - \lambda_i P_i = O \tag{2.20}$$

さて、これで定理の証明のための準備ができました。

証明 2.1 今、勝手なベクトル $\boldsymbol{x}$ を射影分解すると、

$$e^{Mt}\boldsymbol{x} = e^{Mt}P_1\boldsymbol{x} + e^{Mt}P_2\boldsymbol{x} + \cdots + e^{Mt}P_p\boldsymbol{x} \tag{2.21}$$

右辺の第一項目を計算すると、

$$\begin{aligned}
&e^{Mt}P_1\boldsymbol{x} \\
&= e^{(M-\lambda_1 I)t + \lambda_1 It}P_1\boldsymbol{x} = e^{\lambda_1 It}e^{(M-\lambda_1 I)t}P_1\boldsymbol{x} && (2.22)\\
&= e^{\lambda_1 t}Ie^{(M-\lambda_1 I)t}P_1\boldsymbol{x} \\
&= e^{\lambda_1 t}e^{(M-\lambda_1 I)t}P_1\boldsymbol{x} \\
&= e^{\lambda_1 t}\left(I + t(M-\lambda_1) + \frac{t^2}{2!}(M-\lambda_1)^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}(M-\lambda_1)^k + \cdots\right)P_1\boldsymbol{x} && (2.23)\\
&= e^{\lambda_1 t}P_1\boldsymbol{x} \qquad (\because \text{式 } 2.20 \text{ より}) && (2.24)\\
&\text{以上より、} \quad e^{Mt}P_1 = e^{\lambda_1 t}P_1 && (2.25)
\end{aligned}$$

ここで注意するのは、式 2.22 の変形が出来るのは、行列 $A,\ B$ が可換なら $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ のように変形できる[*9]ためだということ。これは行列 I が他のどんな行列とも可換だからです。

他の項についても同様のことが出来ます。結局、これで定理 2.1 の式 2.13 が示せたことになります。

定理 2.1 が示せたので、次の課題は P の計算です。

ところで、ある多項式 $f(\lambda)$ をもってきて λ の代わりに行列 M を入れると、$f(M)$ は行列になります。射影行列から導いた性質、式 2.19 から、

$$f(M) = f(\lambda_1)P_1 + f(\lambda_2)P_2 + \cdots + f(\lambda_p)P_p \tag{2.26}$$

となることが分かります。

ここで $f_1(\lambda)$ にラグランジェの補間公式とよばれる次式、

$$f_1(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\cdots(\lambda - \lambda_p)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\cdots(\lambda_1 - \lambda_p)} \tag{2.27}$$

を選ぶと、

$$f_1(\lambda_1) = 1, \qquad f_1(\lambda_2) = \cdots = f_1(\lambda_p) = 0 \tag{2.28}$$

[*9] この性質の証明は A.2 節にあります。

が成立します。これは射影の性質、式 2.18 が示す性質とまったく同じです。つまり、この多項式 $f_1(\lambda)$ に M を代入すると射影の行列 P_1 を得ることが出来るということです。他の射影行列についても同じことが言えます。

2.3　一般固有値問題

ここでは行列 M が対角化できない一般の場合について考えて見ましょう。

行列が対角化可能とは、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が式 2.14 のように一意に分解できることと同値でした。つまり、固有空間の直和が全空間になっていなければならりません。直和とは共通部分が空集合であるようなの集合の和集合のことです。固有空間を全部集めると全空間になり、ある固有空間に属するベクトルは、他の固有空間には属さないということです。

ここではそのような条件が満たされない場合を扱います。やはり射影による分解をして解の振る舞いのイメージをつかみたいわけですが、固有空間では足りない[*10]。そのために一般固有空間および一般固有ベクトルと言う概念を導入して不足分を補います。導入のための準備からはじめましょう。

まず次の多項式についての定理から始めます。

定理 2.2 多項式 $f_i(x),\ (i = 1, 2, \cdots, p)$ が互いに素な（共通因子を持たない）場合、ある多項式 $h_i(x)$ が存在し、次の等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{p} f_i(x)h_i(x) = 1 \qquad ({}^{\forall}x \in R) \tag{2.29}$$

証明 2.2 $a_i(x)$ を任意の多項式として、

$$g(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i(x)f_i(x) \tag{2.30}$$

となる多項式 $g(x)$ の全体の集合を G とします。$a_j(x) = \delta_{ij}$[*11]とすれば $f_i(x) \in G$ だと分かります。この $g(x)$ は以下の性質を持つことが容易に確認できます。

$$g_1(x), g_2(x) \in G \Rightarrow g_1(x) + g_2(x) \in G \tag{2.31}$$
$$g_1(x), g_2(x) \in G \Rightarrow g_1(x)g_2(x) \in G \tag{2.32}$$

ここで、G に属する多項式で最低の次数を持つものを $g_0(x)$ としましょう。このとき $g(x)$ を $g_0(x)$ で割ります。それを式で表すと、ある多項式 $m(x), n(x)$ を使って次の様にかけるでしょう。

$$g(x) = m(x)g_0(x) + n(x) \tag{2.33}$$

上式は $n(x) = g(x) - m(x)g_0(x)$ と変形でき、$g(x), g_0(x) \in G$ です。よって、先にあげた $g(x)$ の性質より $n(x) \in R$ です。

[*10] 対角化不可能な行列は、固有ベクトルの数が足りませんでした。
[*11] クロネッカーのデルタ。$\delta_{ii} = 1,\ \delta_{ij} = 0\ (i \neq j)$

$g(x)$ を $g_0(x)$ で割った余りが $n(x)$ なので

$$(n(x)\text{ の次数}) < (g_0(x)\text{ の次数}) \tag{2.34}$$

であるはずですが、それは $g_0(x)$ が G に属する多項式で最低の次数を持つという仮定に矛盾します。つまり、このような仮定の元で 2.33 という式は成り立ちません。ということは、$n(x) = 0$ でなければばなりません。つまり、${}^\forall g(x) \in G$ は、ある多項式 $m(x)$ を用いて

$$g(x) = m(x)g_0(x) \tag{2.35}$$

と書くことが出来るという訳です。

さて、$f_i(x) \in G$ であり、その共通因子が $g_0(x)$ であることが分かりました。しかし、仮定として $f_i(x)$ は共通因子を持たない多項式としました。つまり、$g_0(x) = 1$。ここで G に属する多項式は式 2.30 の形で書けるのだから、$g_0(x)$ についても同じです。故に、

$$g_0(x) = 1 = \sum_{i=1}^{p} a_i(x) f_i(x) \tag{2.36}$$

が成り立ち、そのような $a_i(x)$ が存在します。ここで $a_i(x) = h_i(x)$ とすれば定理の式が得られます。

次にあげるのはベクトル空間の構造を調べるために必要な定理です。先ほどの定理を使って証明します。

定理 2.3 多項式 $f_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ がどの二つも互いに共通根を持たないならば、

$$N_i = \{\boldsymbol{x} \mid f_i(M)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \tag{2.37}$$

$$N = \{\boldsymbol{x} \mid \prod_{i=1}^{p} f_i(M)\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \tag{2.38}$$

とおくとき、

$$N = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_p \tag{2.39}$$

が成立する。ただし、$\oplus$ は直和を表す記号である。

ここで、多項式に行列を代入して作った行列について重要な性質を確認しておこう。その重要な性質とは、「**任意の多項式にある行列 M を代入して作った行列どうしは可換**」。なぜならば、多項式は M の自然数乗（$M^0 = I$ も含む）の線型結合で出来ていて、M の自然数乗同士はもちろん可換だからです。

証明 2.3 定理の証明は帰納法を使って行います。まず、$p = 1$ について成り立つことは自明です。$p = k$ のとき成立すると仮定します。$p = k + 1$ の時について考えましょう。

ここで、p の値が変わると N の中身も変化するから、区別をつけるため N^p と書きましょう。つまり、$N^p = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_p$ です。また、$f^k(M) = \prod_{i=1}^{k} f_i(M)$ とします。

$f^k(\lambda)$ と互いに素な新しい多項式 $f_{k+1}(\lambda)$ を持ってきて、

$$N^k = \{\boldsymbol{x} \mid f^k(M)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \tag{2.40}$$

$$N_{k+1} = \{\boldsymbol{x} \mid f_{k+1}(M)\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \tag{2.41}$$

$$N^{k+1} = \{\boldsymbol{x} \mid f^k(M) f_{k+1}(M)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \tag{2.42}$$

とおくとき、

$$N^{k+1} = N^k \oplus N_{k+1} \tag{2.43}$$

が成立することを示せばよいでしょう。

上式を噛み砕いて説明すると、N^{k+1} に属するベクトルは、必ず N^k もしくは N_{k+1} のベクトルで、どちらのベクトルでもない、またはどちらのベクトルでもあると言うことは起こらないということです。

定理 2.2 の式 2.29 は多項式だから、x の代わりに行列 M を代入しても成り立ちます。つまり、

$$\sum_{i=1}^{p} f_i(M)h_i(M) = I \tag{2.44}$$

となります。つまり、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して次式が成り立ちます。

$$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} f_i(M)h_i(M)\boldsymbol{x} \tag{2.45}$$

ここで、$f^k(\lambda)$ と $f_{k+1}(\lambda)$ は互いに素だから、上の式に当てはめることが出来ます。

$$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = f^k(M)h^k(M)\boldsymbol{x} + f_{k+1}(M)h_{k+1}(M)\boldsymbol{x} \tag{2.46}$$

ここで $\boldsymbol{x} \in N^{k+1}$ とすると、上式の右辺の第一項に $f_{k+1}(M)$ をかけると、

$$f_{k+1}(M)\{f^k(M)h^k(M)\}\boldsymbol{x} = h^k(M)f^k(M)f_{k+1}(M)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2.47}$$

となります。これは式 2.42 からすぐ分かります。これより、$f^k(M)h^k(M)\boldsymbol{x} \in N_{k+1}$ となることが分かります。

同様に、

$$f^k(M)\{f_{k+1}(M)h_{k+1}(M)\}\boldsymbol{x} = h_{k+1}(M)f^k(M)f_{k+1}(M)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2.48}$$

より $f_{k+1}(M)h_{k+1}(M)\boldsymbol{x} \in N^k$ です。

つまり、${}^\forall \boldsymbol{x^{k+1}} \in N^{k+1}$ は、

$$f_{k+1}(M)h_{k+1}(M)\boldsymbol{x^{k+1}} = \boldsymbol{x^k} \quad \in N^k \tag{2.49}$$

$$f_{k+1}(M)h_{k+1}(M)\boldsymbol{x^{k+1}} = \boldsymbol{x_{k+1}} \in N_{k+1} \tag{2.50}$$

により $\boldsymbol{x^{k+1}} = \boldsymbol{x^k} + \boldsymbol{x_{k+1}}$ と分解できることが分かりました。

そしてこの分解の方法は一通りしかありません。

別の分解方法があったとしましょう。別の分解方法 $\boldsymbol{y^k} \in N^k$, $\boldsymbol{y_{k+1}} \in N_{k+1}$ があったならば、

$$\boldsymbol{x^{k+1}} = \boldsymbol{x^k} + \boldsymbol{x_{k+1}} = \boldsymbol{y^k} + \boldsymbol{y_{k+1}} \tag{2.51}$$

ここで

$$\boldsymbol{x^k} - \boldsymbol{y^k} = \boldsymbol{x_{k+1}} - \boldsymbol{y_{k+1}} \equiv \boldsymbol{z} \tag{2.52}$$

とおきます。$\boldsymbol{z} \in N^k \wedge \boldsymbol{z} \in N^k$ なので、$\boldsymbol{z} \in N^k \cap N^k$ です。これを式 2.46 に代入すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &= f^k(M)h^k(M)\boldsymbol{z} + f_{k+1}(M)h_{k+1}(M)\boldsymbol{z} \\ &= \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.53}$$

となります。つまり、$\boldsymbol{x^k} = \boldsymbol{y^k},\ \boldsymbol{x_{k+1}} = \boldsymbol{y_{k+1}}$ となる。

これで式 2.43 が成り立つことを示せました。

以上より $p = k+1$ の時も定理が成り立つことが証明できので、どんな p でも定理が成り立つことが分かります。

さて、ここで一般固有空間について議論するための準備が整いました。まずは一般固有ベクトルおよび一般固有空間の定義をしましょう。

定理 2.4 行列 M の固有値 λ_i の代数的重複度を m_i とする。λ_i に対応する一般固有ベクトルとは、

$$(M - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2.54}$$

を満たすベクトルのことである。

λ_i に対応する一般固有空間 G_i とは、上式を満たす（もちろん $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ も含む）ベクトルの全体である。

$$G_i = \{\boldsymbol{x} \mid (M - \lambda_i I)^{m_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \tag{2.55}$$

式 2.54 が固有方程式 $(M - \lambda_i I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の拡張版なのは納得出来るでしょう。そして、行列 M が固有空間のみでは n 次元空間全てを張らないときでもこの一般固有空間 G_i 全ての直和

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p \tag{2.56}$$

は n 次元全体になることが期待されます。

これを示すためにはケーリー・ハミルトンの定理[*12]を使います。

定理 2.5 ケーリー・ハミルトンの定理
行列 M の固有方程式を $\Phi(\lambda)$ とすると $\Phi(M) = O$

$\Phi(M) = O$ なので、${}^\forall \boldsymbol{x} \in R^n$ において $\Phi(M)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ です。つまり n 次元空間全体 E は

$$E = \{\boldsymbol{x} \mid \Phi(M)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \tag{2.57}$$

と表すことが出来ます。

ここで、$\Phi(\lambda)$ の根は固有値 $\lambda_i,\ (i = 1, 2, \cdots, p)$ であるので、

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p} \tag{2.58}$$

$$= \prod_{i=1}^{p} f_i(\lambda) \qquad (f_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i}) \tag{2.59}$$

と分解できます。

ここで、$\lambda_i \neq \lambda_j,\ (i \neq j)$ だから、$f_i(\lambda),\ (i = 1, 2, \cdots, p)$ は互いに素です。

つまり定理 2.3 を適用することが出来、n 次元空間全体 E は一般固有空間の直和 G_i で表せることが分かりました。式で書くと、

$$E = G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p \tag{2.60}$$

[*12] 線型代数の本に必ずあるので、証明はそちらで確認して下さい。

となります。

ここで、普通の固有空間の場合と同様に次の定理が成立します。

定理 2.6 全ての M について、多項式からなる行列 $R_i(t), \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$ を用いて、

$$e^{Mt} = R_1(t)e^{\lambda_1 t} + R_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + R_p(t)e^{\lambda_p t} \tag{2.61}$$

が成立する。ここで、$R_i(t)$ は高々 $m_i - 1$ 次の多項式を成分にもつ行列である。

証明 2.4 証明は定理 2.1 とほとんど同じです。

一般固有空間 G_i への射影行列を P_i とします。定理 2.1 の場合と同様に $P_iP_j = \delta_{ij}P_i$ が成立するので、途中まではまったく同様な変形で済みます。

変形が同様に行われるのは式 2.23 までで、その後は $(M - \lambda_i)^{m_i}\boldsymbol{x} = 0$ に気をつければ、

$$\begin{aligned}
&e^{Mt}P_1\boldsymbol{x} \\
&= (\text{式 } 2.23) \\
&= e^{\lambda_1 t}\left(I + t(M - \lambda_1) + \frac{t^2}{2!}(M - \lambda_1)^2 + \cdots + \frac{t^{m_1 - 1}}{(m_1 - 1)!}(M - \lambda_1)^{m_1 - 1}\right)P_1\boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

となることが分かります。つまり、

$$R_1(t) = \left(I + t(M - \lambda_1) + \frac{t^2}{2!}(M - \lambda_1)^2 + \cdots + \frac{t^{m_1 - 1}}{(m_1 - 1)!}(M - \lambda_1)^{m_1 - 1}\right)P_1 \tag{2.63}$$

です。これを見れば高々 $m_1 - 1$ 次の多項式を成分にもつことはすぐ分かります。他の R_i についても同様に出来ます。

対角化可能な場合と同様、$P_i(t)$ の計算方法についても考えてみます。固有多項式 $\Phi(\lambda)$ の逆数を下の様に部分分数分解します。

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{k_1(\lambda)}{(\lambda_1 - \lambda)^{m_1}} + \frac{k_2(\lambda)}{(\lambda_2 - \lambda)^{m_2}} + \cdots + \frac{k_p(\lambda)}{(\lambda_p - \lambda)^{m_p}} \tag{2.64}$$

この $k_i(\lambda)$ を用いて、多項式 $g_i(\lambda)$ を作ります。

$$\begin{aligned}
g_i(\lambda) &= \frac{k_i(\lambda)}{(\lambda_i - \lambda)^{m_i}}\Phi(\lambda) \\
&= k_i(\lambda) \cdot (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_{i-1} - \lambda)^{m_{i-1}}\underset{\clubsuit\nearrow}{}(\lambda_{i+1} - \lambda)^{m_{i+1}} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

ここで ♣ では、$(\lambda_i - \lambda)^{m_i}$ がないことに気をつけましょう。

以上より、

$$\begin{aligned}
&g_1(\lambda) + g_2(\lambda) + \cdots + g_p(\lambda) \\
&= \left(\frac{k_1(\lambda)}{(\lambda_1 - \lambda)^{m_1}} + \frac{k_2(\lambda)}{(\lambda_2 - \lambda)^{m_2}} + \cdots + \frac{k_p(\lambda)}{(\lambda_p - \lambda)^{m_p}}\right)\Phi(\lambda) \\
&= \frac{1}{\Phi(\lambda)}\Phi(\lambda) = 1
\end{aligned} \tag{2.66}$$

となります[*13]。

[*13] また、容易に $g_i(\lambda_j) = 0, \ (i \neq j)$ が成り立つことが分かるかり、これを上式と合わせると、$g_i(\lambda_i) = 1$ もすぐ分かるでしょう。

よって、任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in E$ は次の様に分解できます。

$$\boldsymbol{x} = g_1(M)\boldsymbol{x} + g_2(M)\boldsymbol{x} + \cdots + g_p(M)\boldsymbol{x} \tag{2.67}$$

ここで上式の右辺第一項に $(M - \lambda_1 I)^{m_1}$ をかけると、

$$\begin{aligned}(M - \lambda_1 I)^{m_1} g_1(M)\boldsymbol{x} &= (-1)^{m_1}(\lambda_1 I - M)^{m_1} g_1(M)\boldsymbol{x} \\ &= (-1)^{m_1} k_{m_1}(M) \cdot \Phi(M)\boldsymbol{x} \\ &= \mathbf{0} \qquad (\because \text{ケーリー・ハミルトンの公式})\end{aligned} \tag{2.68}$$

となります。つまり $g_1(M)\boldsymbol{x}$ は一般固有ベクトルであり、$g_1(M)\boldsymbol{x} \in G_1$ です。他の項についても同様のことが言えます。

以上が P_i の計算方法です。

3 解の安定性

3.1 平衡点周りの安定性

これまでの議論で、解の安定性について考えるための道具を得ることが出来ました。ここでは平衡点周りの解の安定性（局所安定性）について考えます。

平衡点とは、微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}) \tag{3.1}$$

において、$f(\boldsymbol{p}) = \mathbf{0}$ を満たす点 $\boldsymbol{p}$ のことです。

安定な平衡点、漸近安定な平衡点、不安定な平衡点についてそれぞれ定義を与えます。

定義 3.1 平衡点 $\boldsymbol{p}$ がある。初期値 $(\boldsymbol{x}_1, t_1)$ を持つ解を $\boldsymbol{x}(t\,;\, \boldsymbol{x}_1, t_1)$ と書くことにする。

1. 安定な平衡点（リヤプノフの意味での安定）となるための条件
   $^\forall\epsilon > 0$ に対し、$^\exists\delta > 0$ を上手くとって、$|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{p}| < \delta$ を満たす $\boldsymbol{x}_1$ を初期値とするどんな解も $^\forall t > 0$ において $|\boldsymbol{x}(t\,;\, \boldsymbol{x}_1, t_1) - \boldsymbol{p}| < \epsilon$ に押さえることが出来る。

2. 漸近安定な平衡点 となるための条件
   $^\exists\delta > 0$ を上手くとって、$|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{p}| < \delta$ を満たす $\boldsymbol{x}_1$ を初期値とするどんな解も $\lim_{t\to\infty} |\boldsymbol{x}(t\,;\, \boldsymbol{x}_1, t_1) - \boldsymbol{p}| = 0$ とすることが出来る。

3. 不安定な平衡点 となるための条件
   安定な平衡点、または漸近安定な平衡点となるための条件を満たさない点は全て不安定な平衡点である。

この定義に依ると、周期解も不安定となることに注意しなければいけません。

3.2 線型微分方程式の場合

以下では線型同次微分方程式 $d\boldsymbol{x}/dt = M\boldsymbol{x}$ についての解の安定性について議論します。$M\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を満たす点 $\boldsymbol{x}$ が平衡点です。行列 M が正則でなければ平衡点の集合は固有値 0 に対応する固有空間全体を作ります。M が正則なら平衡点は $\mathbf{0}$ のみです。

多くの教科書では、M を細かく場合わけして相図を描いて解の安定性について議論しますが、ここでは先の解の射影分解を生かした議論を行いましょう。そこで、行列のノルムというものを定義します。

定義 3.2

$$||A|| = \sup_{x \in E} \frac{|A\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}|} \tag{3.2}$$

を行列 A のノルムと定義する。

まず、行列 A のノルムが有限の値を持つことを確認します。

コーシー・シュワルツの方程式[*14]から、

$$|\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x}| \leq |\boldsymbol{a}_i| \cdot |\boldsymbol{x}| \tag{3.3}$$

が成り立つので、

$$|A\boldsymbol{x}|^2 = \left| \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \right|^2 = |\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{x}|^2 \cdots + |\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{x}|^2 \leq (|\boldsymbol{a}_1^2| + |\boldsymbol{a}_2|^2 + \cdots + |\boldsymbol{a}_n|^2) \cdot |\boldsymbol{x}|^2 \tag{3.4}$$

よって、

$$\begin{aligned} \sup_{x \in E} \frac{|A\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{x}|^2} &\leq \sup_{x \in E} (|\boldsymbol{a}_1|^2 + |\boldsymbol{a}_2|^2 + \cdots + |\boldsymbol{a}_n|^2) \\ &= (|\boldsymbol{a}_1|^2 + |\boldsymbol{a}_2|^2 + \cdots + |\boldsymbol{a}_n|^2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

なので、

$$||A|| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}_i|^2} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \tag{3.6}$$

以上より $||A|| < \infty$ を確認しました。

ここで $||A||$ がノルムの三大公理[*15] を満たしていることを証明します。

まず、$||\boldsymbol{A}|| \leq 0$ は自明であり、$||\boldsymbol{A}|| = 0$ となるのは $A = O$ の場合です。なぜならば、A が一つでも非ゼロ成分を持っているならば、その成分にかけられる x の成分を非ゼロにすれば $\sup_{x \in E} |A\boldsymbol{x}|/|\boldsymbol{x}|$ はゼロにはならないからです。

また、$||\lambda \cdot A|| = |\lambda| \cdot ||A||$ を満たすのは定義から明らかです。

三角不等式に関しては、

$$\sup_{x \in E} \frac{|(A+B)\boldsymbol{x}|}{|x|} \leq \sup_{x \in E} \frac{|(A)\boldsymbol{x}|}{|x|} + \sup_{x \in E} \frac{|(B)\boldsymbol{x}|}{|x|} \leq ||A|| + ||B|| \tag{3.7}$$

[*14] 線型代数の本に載っています。

[*15]

1. $||\boldsymbol{x}|| \leq 0$ であり、$||\boldsymbol{x}|| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
2. $||a\boldsymbol{x}|| = |a| \cdot ||\boldsymbol{x}||$ （ただし a は任意のスカラー）
3. $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$ （三角不等式）

となり、成り立っていることが分かります。

この関係式を使うことで、解の安定性に関する条件を見つけることが出来ます。

$$\begin{aligned}||e^{Mt}|| &= ||R_1(t)e^{\lambda_1 t} + R_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + R_p(t)e^{\lambda_p t}|| \\ &\le ||R_1(t)|| \cdot |e^{\lambda_1 t}| + ||R_2(t)|| \cdot |e^{\lambda_2 t}| + \cdots + ||R_p(t)|| \cdot |e^{\lambda_p t}| \\ &= ||R_1(t)|| \cdot e^{\mu_1 t} + ||R_2(t)|| \cdot e^{\mu_2 t} + \cdots + ||R_p(t)|| \cdot e^{\mu_p t} \end{aligned} \tag{3.8}$$

（ただし $\lambda = \mu + i\nu$）

ここで、$||R_i(t)||$ は高々 $m_i - 1$ 次の方程式なので、無限時間後の解の振る舞いは μ に完全に依存します。

以上より、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の安定性に関して次のことが言えます。

1. M が対角化可能な場合は、$\mu_i \le 0$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ なら安定。
2. M が対角化不可能な場合は、$\mu_i < 0$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ なら安定。
3. $\mu_i < 0$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ ならば全ての場合に漸近安定。

なお、固有値の実数部分 μ_i が全て負である行列のことを、安定な行列と呼びます。

3.3 リヤプノフ関数

線型微分方程式の定係数の場合は今までの議論でほぼ問題ありませんが、これでは非線型の問題に関して上手いアプローチが取れません。そこで、非線型の場合にも通じるリヤプノフの考えというものを導入しましょう。

行列の二次形式[*16]${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が正定値[*17]の時、楕円面を作ります。関数

$$V(t) = {}^t\boldsymbol{x}(t)A\boldsymbol{x}(t) \tag{3.9}$$

を考え、それを時間微分すると、微分方程式の解が乗った楕円面が膨らんでいるのかしぼんでいるのかが分かります。つまり、その楕円面に乗った微分方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が原点に近づいているのかどうかを判断することが出来ます。

実際に微分してみると、

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d^t\boldsymbol{x}(t)}{dt}A\boldsymbol{x}(t) + {}^t\boldsymbol{x}(t)A\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} \tag{3.10}$$

$$= {}^t(M\boldsymbol{x}(t))A\boldsymbol{x}(t) + {}^t\boldsymbol{x}(t)AM\boldsymbol{x}(t) \tag{3.11}$$

$$= {}^t\boldsymbol{x}(t)({}^tMA + AM)\boldsymbol{x}(t) \tag{3.12}$$

これがあらゆる $\boldsymbol{x}(t)$ において正の値を取らなければ、楕円面は「しぼんでいる」のだから、原点は安定です。つまり、${}^tMA + AM$ が半負定値[*18]ならば安定、負定値[*19]ならば漸近安定です。

この方法で安定性を調べるには上手い行列 A を見つけなければいけない。それに関する定理があります。

[*16] これも線型代数の話題です。教科書などに載ってると思います。
[*17] 全ての固有値が正の行列を正定値（行列）といいます。
[*18] 全ての固有値が非正の行列を半負定値（行列）といいます。
[*19] 全ての固有値が負の行列を負定値（行列）といいます。

定理 3.1 M の固有値の実数部分 μ_i が全て負であれば、${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が正定値を、${}^tMA+AM$ を負定値を取るように出来る。そして、

$$A=\int_0^\infty {}^t(e^{M\tau})(e^{M\tau})d\tau \tag{3.13}$$

はそれを満たす。

証明 3.1 M の固有値の実数部分 μ_i が全て負であるという仮定から、式 3.13 の右辺が収束することは分かります。

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=\int_0^\infty {}^t\boldsymbol{x}{}^t(e^{M\tau})(e^{M\tau})\boldsymbol{x}d\tau=\int_0^\infty |(e^{M\tau})\boldsymbol{x}|^2d\tau\geq 0 \tag{3.14}$$

から、${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が正定値を持つことが分かりました。等号成立は $\boldsymbol{x}=0$ の場合に限ります。

$$\begin{aligned}{}^tMA+AM&=\int_0^\infty {}^t\left[{}^tM(e^{M\tau})(e^{M\tau})+(e^{M\tau})(e^{M\tau})M\right]d\tau\\&=\int_0^\infty\left[{}^t\left(\frac{de^{M\tau}}{d\tau}\right)(e^{M\tau})+{}^t(e^{M\tau})\left(\frac{de^{M\tau}}{d\tau}\right)M\right]d\tau\\&=\int_0^\infty\frac{d}{d\tau}\left[{}^t(e^{M\tau})(e^{M\tau})\right]d\tau\\&=\left[{}^t(e^{M\tau})(e^{M\tau})\right]_0^\infty\\&=-I\end{aligned} \tag{3.15}$$

よって、負定値行列です。

ここで考えた関数 $V(t)$ をこの線型微分方程式のリヤプノフ関数と言います。

4 非線型微分方程式の安定性

4.1 リヤプノフ関数

まずはリヤプノフ関数の正確な定義からしたいところですが、その前に、大切な**近傍**という概念を導入します。

定義 4.1 n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 U が、$\boldsymbol{x}_0$ を中心とするある半径 $\epsilon\ (>0)$ の**球**

$$B_\epsilon(\boldsymbol{x}_0)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n;|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\epsilon\} \tag{4.1}$$

を含む、つまり $B_\epsilon(\boldsymbol{x}_0)\subset U$ である時、U は $\boldsymbol{x}_0$ の**近傍**であるという。

この定義において「ある半径」となっているのは、ϵ を頑張って小さくとって $B_\epsilon(\boldsymbol{x}_0)\subset U$ と出来るなら U は近傍だと認められる、という意味です。

ここでは n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ と一般的な距離 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$ を使って定義しましたが、一般的には位相空間 X と距離 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)$ によって定義するのが普通です。

さて、それではリヤプノフ関数の正確な定義をしましょう。

定義 4.2 R^n 上の微分方程式 $d\boldsymbol{x}/dt=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が平衡点 $\boldsymbol{p}$ を持つとする。$V(\boldsymbol{x})$ が、

1. 平衡点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で $\boldsymbol{x}$ により一階微分可能（C^1 級）。

2. $V(\boldsymbol{x}) > V(\boldsymbol{p}) = 0$ かつ $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) = \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$

という条件を満たす時、関数 $V(\boldsymbol{x})$ はリヤプノフ関数であるという。

$V(\boldsymbol{p}) = 0$ は成り立つ必要はありませんが、ここでは簡単のためにそうしました。

リヤプノフ関数を使った、解の安定性について次の定理が成り立ちます。

定理 4.1 平衡点 $\boldsymbol{p}$ のについて。

1. $V(\boldsymbol{x})$ はリヤプノフ関数であるなら平衡点 $\boldsymbol{p}$ は安定。
2. $V(\boldsymbol{x})$ がリヤプノフ関数になるための条件の二つ目が、$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) < 0 \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p})$ と出来るなら、$\boldsymbol{p}$ は漸近安定。
3. $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) > 0 \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p})$ ならば、平衡点 $\boldsymbol{p}$ は不安定。
   （V はリヤプノフ関数ではない）

安定、不安定の条件を満たすことを言えば良い。

証明 4.1 $\dot{V} \leq 0$ であるので、解曲線は $V(\boldsymbol{x}) = c,\ ({}^\forall c > 0)$ という閉曲線を外から内に向かって通ります。平衡点近傍の全ての $\boldsymbol{x}$ についてこれが成り立っているのだから、これは安定性の条件を満たす。

また、$\dot{V} < 0$ ならば、V は単調減少で下に有界だから極限が存在します。

$$\lim_{t\to\infty} V(\boldsymbol{x}(t)) = a \tag{4.2}$$

もし $a \neq 0$ なら、$\boldsymbol{x}(t)$ は $t \to \infty$ において $V(\boldsymbol{x}(t)) = 0$ 上にあることになります。その時、$\dot{V} \to 0$ となります。しかし、これは $\dot{V} < 0,\ \boldsymbol{x} \neq 0$ に矛盾。つまり、$a = 0$ となります。
これで漸近的安定の条件を満たすことの証明が出来ました。

どんな点 $\boldsymbol{p}$ の近傍をとっても $V(\boldsymbol{x_0}) > 0,\ \boldsymbol{x_0} \neq 0$ があるので、これを出発とする解は $\dot{V} > 0$ なので、0 には近づけません。
これは不安定な平衡点であることの条件を満たしています。

この、不安定であるための条件は強すぎで、もう少し弱めた条件でも不安定な平衡点が見つかります。それは次の**チェタエフの定理（Chetaev's Theorem）**によって示されます。

定理 4.2 チェタエフの定理（Chetaev's Theorem）
Ω を $\boldsymbol{p}$ の近傍とする。次の性質を満たす領域 Ω_1 と x で一回微分可能（C^1 級）な関数 V が見つかると、$\boldsymbol{p}$ は不安定である。

1. $\partial\Omega_1 \cap \Omega$ において $V(\boldsymbol{x}) = 0$ （ただし、$\partial\Omega_1$ は Ω_1 の境界である。）
2. $\partial\Omega_1 \ni \boldsymbol{p}$
3. $V(\boldsymbol{x}) > 0,\quad \dot{V}(\boldsymbol{x}) > 0,\quad (x \ni \Omega_1)$
   （V はリヤプノフ関数ではない）

証明 4.2 安定性の定義が、満たされないことを言えば良いのです。

$B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ を考えます。二つ目と三つ目の仮定から、$^\forall \boldsymbol{x_0} \in \Omega_1 \cap B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ において、$V(\boldsymbol{x}_0) > 0$ となります。

この領域では $\dot{V}(\boldsymbol{x}) > 0$ であるから、解 $\boldsymbol{x(t\ ;\ x_0, t_0)}$ は $^\forall t$ にわたって（この先ずっと）、この領域に留まることは出来ず、有限時間後にはこの領域から逃げ出してしまいます。

また $\partial\Omega_1 \cap B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ において $V(\boldsymbol{x}) = 0$ であるので、解は $\partial\Omega$ の部分を通って逃げることは出来ません。$V(\boldsymbol{x}_0) > 0,\ \dot{V}(\boldsymbol{x}) > 0$ なので V は決して 0 にはなれないからです。つまり、解は $\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ を通ってこの領域の外へ出ます。

以上より、安定性の定義が満たされないことが証明できました。

これで証明は OK ですが、この定理に私は最初、次の二つの疑問を持ちました。

1. 解は $\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ を通ってこの領域 $\Omega_1 \cap B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ の外に出る、とあるが $B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ の中で、V が無限大に発散する可能性はないのだろうか？
   $\dot{V} > 0$ なので、V が無限大に発散するのは自明だけれど、$\boldsymbol{R}^n$ のどの場所において発散するかは分からないのではないか？
2. $\partial\Omega_1 \cap \Omega$ において $V(\boldsymbol{x}) = 0$ とあるが、$\partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega}$ において $V(\boldsymbol{x}) = 0$ が言えないなら、そこから解が逃げ出し、また平衡点へ舞い戻る事も起こり得るのではないだろうか？
   ($\overline{\Omega}$ は Ω の補集合。)

一つ目の疑問は、安定性の定義を考えれば直ぐに解決できます。

安定性の定義は、「$^\forall\epsilon$ に対し〜」でした。つまり、ある ϵ において $B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ の中で、V が無限大に発散しても、十分小さい ϵ を取れば（ϵ はいくらでも小さく取れる！）、$B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ の外で V が無限大に発散するように出来るのです。そのような ϵ について成り立たないなら、当然 $^\forall\epsilon$ に対し成り立つはずはなく、よって安定性の定義を満たさないのです。

二つ目の疑問は、V が一回微分可能、つまり連続関数であることが分かれば解決できます。

V は連続関数であるので、曲線 $V(\boldsymbol{x}) = 0$ には「切れ目」がありません。領域 Ω_1 の外に出なければ $\dot{V} < 0$ には成り得ないのですから、解が平衡点へ舞い戻る可能性はありません。

付録 A　補記

A.1　射影行列の性質

射影行列の性質、

1. $P_i^2 = P_i$
2. $P_i P_j = O$

が成り立つことを示す。

ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \in F_1$ を分解しても、もともと F_1 の成分しかないから、$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} + \cdots + \boldsymbol{0}$ となります。これが $P_1\boldsymbol{x}_1 + P_2\boldsymbol{x}_2 + P_3\boldsymbol{x}_3 + \cdots + P_p\boldsymbol{x}_p$ と等しいので、$P_1\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1,\ P_i\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}\ (i \neq 1)$ です。

ここであるベクトル $\boldsymbol{x}$ を持ってきて $\boldsymbol{x}_1 = P_1\boldsymbol{x}$ とすると、$P_1P_1\boldsymbol{x} = P_1\boldsymbol{x}$、$P_iP_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\ (i \neq 1)$ が成り立つことが分かります。ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は何でもいいので、$\boldsymbol{x}$ も何でも良く、$P_1P_1 = I,\ P_1P_1 = O\ (i \neq 0)$ となります。

他の固有空間に対しても同じことが言えるので、結局上の二つの性質が成り立つことが証明できました。

A.2　行列の指数関数の性質

普通の指数関数は、$e^{a+b} = e^a e^b$ ですが、行列の指数関数で同様のことを言うには、条件が必要となります。

行列の指数関数では、行列 A と B が可換ならば $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ となります。これを証明しましょう。

A と B は可換なので、普通の数字のように掛け算の順序を交換できます。よって、

$$
\begin{aligned}
e^{(A+B)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} {}_kC_j A^{k-j} B^j \qquad (\because\ A, B\ \text{可換}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k!} {}_kC_{k-j} A^{k-j} B^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{k-j}B^j}{(k-j)!\ j!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^m B^j}{m!\ j!} \qquad (\because\ m = k - j\ \text{とした。}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} \qquad (\because\ A, B\ \text{可換}\ ) \\
&= e^A e^B
\end{aligned} \tag{付録 A.1}
$$

が成り立ちます。

別の方法でも証明できます。

A と B が可換ですから、当然その級数である $e^{A(-t)}$, $e^{B(-t)}$, $e^{(A+B)t}$ も A と B となら可換です。

よって、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{(A+B)t}e^{B(-t)}e^{A(-t)} &= (A+B)e^{(A+B)t}e^{B(-t)}e^{A(-t)} \\ &\quad - Be^{(A+B)t}e^{B(-t)}e^{A(-t)} \\ &\quad - Ae^{(A+B)t}e^{B(-t)}e^{A(-t)} \\ &= 0\end{aligned} \tag{付録 A.2}$$

つまり、$e^{(A+B)t}e^{B(-t)}e^{A(-t)} = C$（$C$:定数行列）であり、この両辺に $t=0$ を代入すると $I=C$ となるので、$e^{(A+B)t}e^{B(-t)}e^{A(-t)} = I$ より $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ となる。

参考文献

[1] 笠原　晧司：新微分方程式対話、日評数学選書

[2] 丹波　敏雄：微分方程式と力学系の理論入門、遊星者

[3] 一石　賢：道具としての線型代数、日本実業出版社

[4] C. ロビンソン：力学系、シュプリンガー・フェアラーク東京